Teorija fiksne tačke i primene

II kolokvijum

1. Neka je dat skup $K \subseteq \mathbb{R}^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, gde je

   $K = \{x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \mid 0 \leq x_i \leq 1,\ i = \overline{1, 2n},\ \wedge\, x_1 + x_{2n} = x_2 + x_{2n-1} = \ldots = x_n + x_{n+1}\}.$

   Dokazati da preslikavanje T definisano sa

   $Tx = (\sin^2 x_1, \sin^2 x_2, \ldots, \sin^2 x_n, \cos^2 x_n, \cos^2 x_{n-1}, \ldots, \cos^2 x_1),\ x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in K,$

   ima fiksnu tačku u skupu K.

2. Neka je (X) konačno-dimenzionalna vektorski prostor, $r > 0$, i $f : K[0, r] \mapsto X$ i $g : \overline{f(K[0, r])} \mapsto X$ neprekidna preslikavanja za koja važi:

   $$\|x\| = r \ \Rightarrow\ \|f(x)\| = r \ \wedge\ \|g(x)\| <\leq r.$$

   Ispitati egzistenciju fiksne tačke preslikavanja $g \circ f$.

3. Neka su date funkcije $P, Q : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Dokazati ili opovrgnuti kontraprimerom:
   a) Ako su funkcije P i Q ograničene, postoji rešenje sistema jednačina

   $$P(x,y) \cdot Q(x,y) = x$$
   $$P(x,y) \cdot Q(x,y) \cdot Q(x,y) = y.$$

   b) Ako su funkcije P i Q ograničene, postoji rešenje sistema jednačina

   $$P(x,y) = \frac{x+y}{2}$$
   $$Q(x,y) = \frac{x-y}{2}.$$

   c) Ako je funkcija P ograničena, postoji rešenje jednačine $P(x,y) = x + y$.

4. Ispitati da li je sa $P \subseteq c_0$:
   a) $P = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \mid x_{n+1} \leq x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$
   b) $P = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \mid x_{n+1} > x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
   c) $P = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 \mid x_1 \geq 0 \ \wedge\ x_{n+1} \leq \frac{1}{2} x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$
   određen konus u c_0.
   Ukoliko je neki od datih skupova konus, ispitati da li je $d : l_\infty \times l_\infty \mapsto c_0$ konusna metrika ako je

   $$d(x,y) = \left(\frac{|x_1 - y_1|}{2^n} \right)_{n\in\mathbb{N}},\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$$

   .